অধ্যায় ৯

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratio)

আমরা প্রতিনিয়ত ত্রিভুজ, বিশেষ করে সমকোণী ত্রিভুজের ব্যবহার করে থাকি। আমাদের চারিদিকের পরিবেশে নানা উদাহরণ দেখা যায় যেখানে কল্পনায় সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করা যায়। সেই প্রাচীন যুগে মানুষ জ্যামিতির সাহায্যে নদীর তীরে দাঁড়িয়ে নদীর প্রস্থ নির্ণয় করার কৌশল শিখেছিল। গাছে না উঠেও গাছের ছায়ার সঙ্গে লাঠির তুলনা করে নিখুঁতভাবে গাছের উচ্চতা মাপতে শিখেছিল। এই গাণিতিক কৌশল শেখানোর জন্য সৃষ্টি হয়েছে ত্রিকোণমিতি নামে গণিতের এক বিশেষ শাখা। Trigonometry শব্দটি গ্রিক শব্দ tri (অর্থ তিন), gon (অর্থ ধার) ও metron (অর্থ পরিমাপ) দ্বারা গঠিত। ত্রিকোণমিতিতে ত্রিভুজের বাহু ও কোণের মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ে পাঠদান করা হয়। মিশর ও ব্যাবিলনীয় সভ্যতায় ত্রিকোণমিতি ব্যবহারের নিদর্শন রয়েছে। মিশরীয়রা ভূমি জরিপ ও প্রকৌশল কাজে এর বহুল ব্যবহার করত বলে ধারণা করা হয়। এর সাহায্যে জ্যোতির্বিদগণ পৃথিবী থেকে দূরবর্তী গ্রহ-নক্ষত্রের দূরত্ব নির্ণয় করতেন। অধুনা ত্রিকোণমিতির ব্যবহার গণিতের সকল শাখায়। ত্রিভুজ সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান, নেভিগেশন ইত্যাদি ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতির ব্যাপক ব্যবহার হয়ে থাকে। জ্যোতির্বিজ্ঞান, ক্যালকুলাসসহ গণিতের অন্যান্য গুরুত্বপূর্ণ শাখায় ত্রিকোণমিতির ব্যবহার রয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বর্ণনা করতে পারবে।
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর ধ্রুবতা যাচাই করে প্রমাণ ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- 0° ও 90° কোণের অর্থপূর্ণ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয় করে প্রয়োগ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি প্রমাণ করতে পারবে।
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলির প্রয়োগ করতে পারবে।

সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর নামকরণ

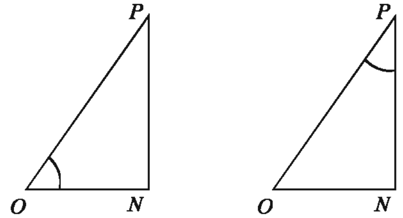
আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো অতিভুজ, ভূমি ও উন্নতি নামে অভিহিত হয়। ত্রিভুজের

আনুভূমিক অবস্থানের জন্য এ নামসমূহ সার্থক। আবার সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের একটির সাপেক্ষে অবস্থানের প্রেক্ষিতেও বাহুগুলোর নামকরণ করা হয়। যথা:

১. 'অতিভুজ (hypotenuse)', সমকোণী ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু যা সমকোণের বিপরীত বাহু

২. 'বিপরীত বাহু (opposite side)', যা হলো প্রদত্ত কোণের সরাসরি বিপরীত দিকের বাহু

৩. 'সন্নিহিত বাহু (adjacent side)', যা প্রদত্ত কোণ সৃষ্টিকারী একটি রেখাংশ।



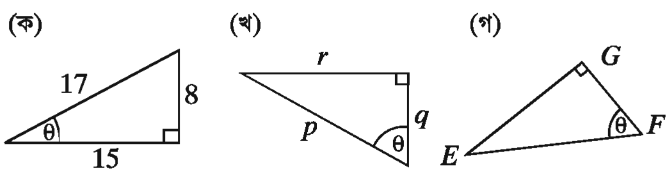
$\angle PON$ কোণের জন্য অতিভুজ OP, সন্নিহিত বাহু ON, বিপরীত বাহু PN	$\angle OPN$ কোণের জন্য অতিভুজ OP, সন্নিহিত বাহু PN, বিপরীত বাহু ON

জ্যামিতিক চিত্রের শীর্ষবিন্দু চিহ্নিত করার জন্য বড় হাতের বর্ণ ও বাহু নির্দেশ করতে ছোট হাতের বর্ণ ব্যবহার করা হয়। কোণ নির্দেশের জন্য প্রায়শই গ্রিক বর্ণ ব্যবহৃত হয়। গ্রিক বর্ণমালার ছয়টি বহুল ব্যবহৃত বর্ণ হলো:

alpha α	beta β	gamma γ	theta θ	phi ϕ	omega ω
আলফা	বিটা	গামা	থিটা	ফাই	ওমেগা

প্রাচীন গ্রিসের বিখ্যাত গণিতবিদদের হাত ধরেই জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতিতে গ্রিক বর্ণগুলোর ব্যবহার হয়ে আসছে।

উদাহরণ ১. θ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু চিহ্নিত কর।



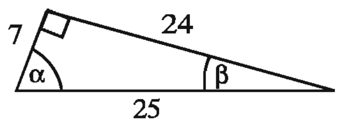
সমাধান:

ক) অতিভুজ 17 একক
বিপরীত বাহু 8 একক
সন্নিহিত বাহু 15 একক

খ) অতিভুজ p
বিপরীত বাহু r
সন্নিহিত বাহু q

গ) অতিভুজ EF
বিপরীত বাহু EG
সন্নিহিত বাহু FG

উদাহরণ ২. α ও β কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

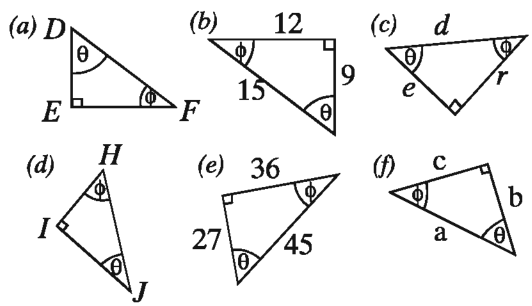


সমাধান:

ক) α কোণের জন্য
অতিভুজ 25 একক
বিপরীত বাহু 24 একক
সন্নিহিত বাহু 7 একক

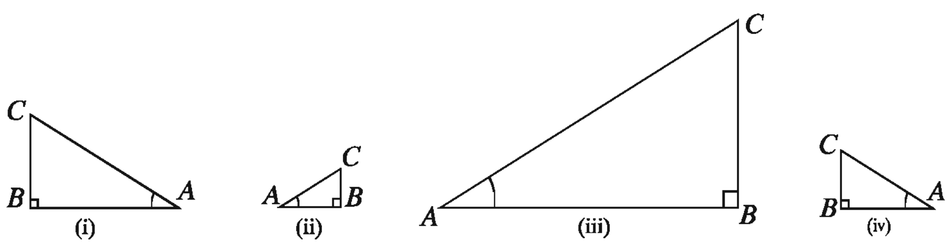
খ) β কোণের জন্য
অতিভুজ 25 একক
বিপরীত বাহু 7 একক
সন্নিহিত বাহু 24 একক

কাজ: θ ও ϕ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু নির্দেশ কর।

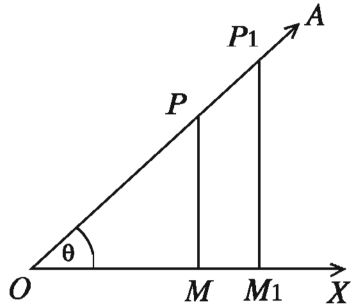


সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাতসমূহের ধ্রুবতা

কাজ: নিচের চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য মেপে সারণিটি পূরণ কর। ত্রিভুজের অনুপাতগুলো সম্পর্কে কী লক্ষ কর?



বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	AB	AC	BC/AC	AB/AC	BC/AB



মনে করি, $\angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। OA বাহুতে যেকোনো একটি বিন্দু P নিই। P থেকে OX বাহু পর্যন্ত PM লম্ব টানি। ফলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হলো। এই $\triangle POM$ এর PM, OM ও OP বাহুগুলোর যে তিনটি অনুপাত পাওয়া যায় এদের মান OA বাহুতে নির্বাচিত P বিন্দুর অবস্থানের ওপর নির্ভর করে না।

$\angle XOA$ কোণের OA বাহুতে যেকোনো বিন্দু P ও P_1 থেকে OX বাহু পর্যন্ত যথাক্রমে PM ও P_1M_1 লম্ব অঙ্কন করলে $\triangle POM$ ও $\triangle P_1OM_1$ দুইটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ গঠিত হয়।

এখন, $\triangle POM$ ও $\triangle P_1OM_1$ সদৃশ হওয়ায়,

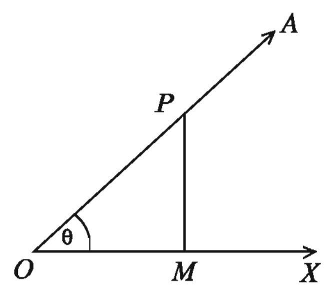
$$\frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OP}{OP_1} \text{ বা, } \frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1}$$

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{OP}{OP_1} \text{ বা, } \frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1}$$

$$\frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OM}{OM_1} \text{ বা, } \frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1}$$

অর্থাৎ, অনুপাতসমূহের প্রত্যেকটি ধ্রুবক। এই অনুপাতসমূহকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলে।

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



মনে করি, $\angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। OA বাহুতে যেকোনো একটি বিন্দু P নিই। P থেকে OA বাহু পর্যন্ত PM লম্ব টানি। ফলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হলো। এই $\triangle POM$ এর PM, OM ও OP বাহুগুলোর যে ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায় এদের $\angle XOA$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয় এবং এদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সুনির্দিষ্ট নামে নামকরণ করা হয়।

$\angle XOA$ সাপেক্ষে সমকোণী ত্রিভুজ POM এর PM বিপরীত বাহু, OM সন্নিহিত বাহু, OP অতিভুজ। এখন $\angle XOA = \theta$ ধরলে, θ কোণের যে ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত পাওয়া যায় তা নিম্নে বর্ণনা করা হলো।

চিত্র থেকে,

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} \quad [\theta \text{ কোণের সাইন (sine)}]$$

$\cos\theta = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$ [θ কোণের কোসাইন (cosine)]

$\tan\theta = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$ [θ কোণের ট্যানজেন্ট (tangent)]

এবং এদের বিপরীত অনুপাত

$\text{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ [θ কোণের কোসেক্যান্ট (cosecant)]

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ [θ কোণের সেক্যান্ট (secant)]

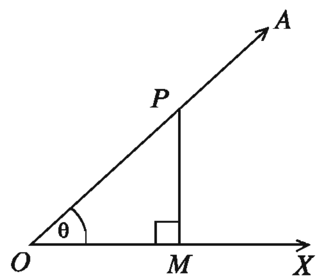
$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ [θ কোণের কোট্যানজেন্ট (cotangent)]

লক্ষ করি, $\sin\theta$ প্রতীকটি θ কোণের সাইন-এর অনুপাতকে বোঝায়; sin ও θ এর গুণফলকে নয়। θ বাদে sin আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না। ত্রিকোণমিতিক অন্যান্য অনুপাতের ক্ষেত্রেও বিষয়টি প্রযোজ্য।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর সম্পর্ক

মনে করি, $\angle XOA = \theta$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

পাশের চিত্র সাপেক্ষে, সংজ্ঞানুযায়ী,



$\sin\theta = \dfrac{PM}{OP}$, $\text{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{OP}{PM}$

$\cos\theta = \dfrac{OM}{OP}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{OP}{OM}$

$\tan\theta = \dfrac{PM}{OM}$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{OM}{PM}$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$ [লব ও হরকে OP দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore \boxed{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

এবং একইভাবে,

$\boxed{\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

(i) $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \left(\dfrac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\dfrac{OM}{OP}\right)^2$

$= \dfrac{PM^2}{OP^2} + \dfrac{OM^2}{OP^2} = \dfrac{PM^2 + OM^2}{OP^2} = \dfrac{OP^2}{OP^2}$ [পিথাগোরাসের সূত্র]

$= 1$

বা, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$\therefore$ $\boxed{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1}$

মন্তব্য: পূর্ণসংখ্যা সূচক n এর জন্য $(\sin\theta)^n$ কে $\sin^n\theta$ ও $(\cos\theta)^n$ কে $\cos^n\theta$ ইত্যাদি লেখা হয়।

(ii) $\sec^2\theta = (\sec\theta)^2 = \left(\dfrac{OP}{OM}\right)^2$

$= \dfrac{OP^2}{OM^2} = \dfrac{OM^2 + PM^2}{OM^2}$ [OP সমকোণী $\triangle POM$ এর অতিভুজ বলে]

$= \dfrac{OM^2}{OM^2} + \dfrac{PM^2}{OM^2}$

$= 1 + \left(\dfrac{PM}{OM}\right)^2 = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + \tan^2\theta$

$\therefore$ $\boxed{\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1}$ এবং $\boxed{\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1}$

(iii) $\text{cosec}^2\theta = (\text{cosec}^2\theta)^2 = \left(\dfrac{OP}{PM}\right)^2$

$= \dfrac{OP^2}{PM^2} = \dfrac{PM^2 + OM^2}{PM^2}$ [OP সমকোণী $\triangle POM$ এর অতিভুজ বলে]

$= \dfrac{PM^2}{PM^2} + \dfrac{OM^2}{PM^2} = 1 + \left(\dfrac{OM}{PM}\right)^2$

$= 1 + (\cot\theta)^2 = 1 + \cot^2\theta$

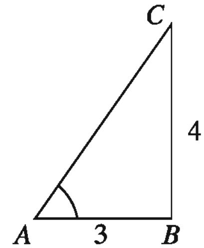
$\therefore$ $\boxed{\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1}$ এবং $\boxed{\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1}$

উদাহরণ ৩. $\tan A = \dfrac{4}{3}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

২০১৮

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan A = \dfrac{4}{3}$।

অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু = 4, সন্নিহিত বাহু = 3



অতিভুজ $=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

সুতরাং, $\sin A=\frac{4}{5}, \cos A=\frac{3}{5}, \cot A=\frac{3}{4}$

$\operatorname{cosec} A=\frac{5}{4}, \sec A=\frac{5}{3}$

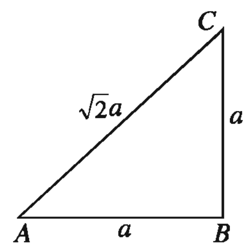
কাজ: নিচের ত্রিকোণমিতিক সূত্রগুলো সহজে মনে রাখার জন্য তালিকা কর।

$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$	$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$

উদাহরণ ৪. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A=1$ হলে $2\sin A\cos A=1$ এর সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan A=1$

অতএব, বিপরীত বাহু = সন্নিহিত বাহু = a



অতিভুজ = $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

সুতরাং, $\sin A=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos A=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

এখন বামপক্ষ $=2\sin A\cos A=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2\cdot\frac{1}{2}=1=$ ডানপক্ষ।

$\therefore$ $2\sin A\cos A=1$ উক্তিটি সত্য।

কাজ:

ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB=29$ সে.মি., $BC=21$ সে.মি. এবং $\angle ABC=\theta$ হলে, $\cos^2\theta-\sin^2\theta$ এর মান বের কর।

উদাহরণ ৫. প্রমাণ কর যে, $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\cdot\operatorname{cosec}\theta$

সমাধান:

বামপক্ষ $=\tan\theta+\cot\theta$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta \cdot \cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta \cdot \cos\theta} \; [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta \cdot \sec\theta$$

$= \sec\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৬. প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \cdot \operatorname{cosec}^2\theta$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$= \sec^2\theta \cdot \operatorname{cosec}^2\theta$$

$=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৭. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta} + \dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta} = 1$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \dfrac{1}{1+\sin^2\theta} + \dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta}$

$$= \frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{1}{1+\frac{1}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1+\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}$$

২০১৮

$= 1 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৮. প্রমাণ কর: $\dfrac{1}{2-\sin^2\theta}+\dfrac{1}{2+\tan^2\theta}=1$

সমাধান:

বামপক্ষ $=\dfrac{1}{2-\sin^2\theta}+\dfrac{1}{2+\tan^2\theta}$

$=\dfrac{1}{2-\sin^2\theta}+\dfrac{1}{2+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\dfrac{1}{2-\sin^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1}{2-\sin^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{2(1-\sin^2\theta)+\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1}{2-\sin^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{2-2\sin^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1}{2-\sin^2\theta}+\dfrac{1-\sin^2\theta}{2-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2-\sin^2\theta}{2-\sin^2\theta}$

$=1=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ৯. প্রমাণ কর: $\dfrac{\tan A}{\sec A+1}-\dfrac{\sec A-1}{\tan A}=0$

সমাধান:

বামপক্ষ $=\dfrac{\tan A}{\sec A+1}-\dfrac{\sec A-1}{\tan A}$

$=\dfrac{\tan^2 A-(\sec^2 A-1)}{(\sec A+1)\tan A}$

$=\dfrac{\tan^2 A-\tan^2 A}{(\sec A+1)\tan A}$ $[\because \sec^2 A-1=\tan^2 A]$

$=\dfrac{0}{(\sec A+1)\tan A}=0=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১০. প্রমাণ কর: $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}}$ [লব ও হরকে $\sqrt{1-\sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}}$

$= \dfrac{1-\sin A}{\cos A}$

$= \dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A - \tan A =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১১. $\tan A + \sin A = a$ এবং $\tan A - \sin A = b$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^2 - b^2 = 4\sqrt{ab}$

সমাধান: এখানে প্রদত্ত, $\tan A + \sin A = a$ এবং $\tan A - \sin A = b$

বামপক্ষ $= a^2 - b^2$

$= (\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2$

$= 4\tan A\sin A$ $[\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab]$

$= 4\sqrt{\tan^2 A \sin^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A(1-\cos^2 A)}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \tan^2 A.\cos^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \sin^2 A}$ $[\because \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}]$

$= 4\sqrt{(\tan A + \sin A)(\tan A - \sin A)}$

$= 4\sqrt{ab}$

$=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

কাজ:

ক) $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^4 A + \cos^2 A = 1$

খ) $\sin^4 A + \sin^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

২০১৮

উদাহরণ ১২. $\sec A + \tan A = \dfrac{5}{2}$ হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে প্রদত্ত, $\sec A + \tan A = \dfrac{5}{2} \ldots (1)$

আমরা জানি, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

বা, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

বা, $(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A) = 1$

বা, $\dfrac{5}{2}(\sec A - \tan A) = 1$ [(1) হতে]

$\therefore \sec A - \tan A = \dfrac{2}{5}$

অনুশীলনী ৯.১

১. নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য-মিথ্যা যাচাই কর। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

ক) $\tan A$ এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম

খ) $\cot A$ হলো cot ও A এর গুণফল

গ) A এর কোন একটি মানের জন্য $\sec A = \dfrac{12}{5}$

ঘ) cos হলো cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ

২. $\sin A = \dfrac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় কর।

৩. দেওয়া আছে, $15\cot A = 8$, $\sin A$ ও $\sec A$ এর মান বের কর।

৪. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB = 13$ সে.মি., $BC = 12$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান বের কর।

৫. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3}\sin A\cos A = \dfrac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর।

প্রমাণ কর (৬–২০):

৬. ক) $\dfrac{1}{\sec^2 A} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

খ) $\dfrac{1}{\cos^2 A} - \dfrac{1}{\cot^2 A} = 1$

২০১৮

গ) $\dfrac{1}{\sin^2 A} - \dfrac{1}{\tan^2 A} = 1$

৭. ক) $\dfrac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \dfrac{\cos A}{\sec A} = 1$

খ) $\dfrac{\sec A}{\cos A} - \dfrac{\tan A}{\cot A} = 1$

গ) $\dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

৮. ক) $\dfrac{\tan A}{1-\cot A} + \dfrac{\cot A}{1-\tan A} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1$

খ) $\dfrac{1}{1+\tan^2 A} + \dfrac{1}{1+\cot^2 A} = 1$

৯. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$

১০. $\tan A\sqrt{1-\sin^2 A} = \sin A$

১১. $\dfrac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

১২. $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2\sec^2 A$

১৩. $\dfrac{1}{1+\sin A} + \dfrac{1}{1-\sin A} = 2\sec^2 A$

১৪. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2\tan^2 A$

১৫. $\dfrac{\sin A}{1-\cos A} + \dfrac{1-\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$

১৬. $\dfrac{\tan A}{\sec A + 1} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A} = 0$

১৭. $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

১৮. $\dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \cdot \tan B$

১৯. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$

২০. $\sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A$

২১. $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$ হলে, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$

২২. যদি $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর।

২৩. $\operatorname{cosec} A - \cot A = \dfrac{4}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান কত?

২৪. $\cot A = \dfrac{b}{a}$ হলে, $\dfrac{a\sin A - b\cos A}{a\sin A + b\cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

২৫. $\operatorname{cosec} A - \cot A = \dfrac{1}{x}$ হলে,

ক) $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, $\sec A = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\tan A + \cot A = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A$

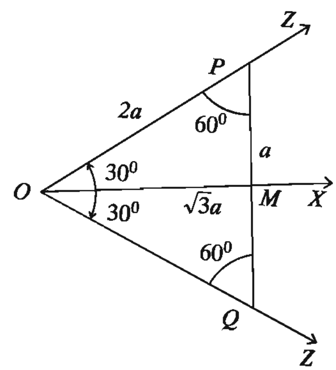
বিশেষ কিছু কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

30°, 45° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক উপায়ে 30°, 45° ও 60° পরিমাপের কোণ আঁকতে শিখেছি। এ সকল কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রকৃত মান জ্যামিতিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়।

30° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করি, $\angle XOZ = 30^\circ$ এবং OZ বাহুতে P একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি এবং PM কে Q পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $MQ = PM$ হয়। O, Q যোগ করে Z পর্যন্ত বর্ধিত করি।



এখন $\triangle POM$ ও $\triangle QOM$ এর মধ্যে $PM = QM$

OM সাধারণ বাহু এবং

অন্তর্ভুক্ত $\angle PMO$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle QMO = 90^\circ$

$\therefore \triangle POM \cong \triangle QOM$

অতএব, $\angle QOM = \angle POM = 30^\circ$

এবং $\angle OQM = \angle OPM = 60^\circ$

আবার, $\angle POQ = \angle POM + \angle QOM = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

$\therefore \triangle OPQ$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

যদি $OP = 2a$ হয়, তবে $PM = \dfrac{1}{2}PQ = \dfrac{1}{2}OP = a$ [যেহেতু $\triangle OPQ$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ]

সমকোণী $\triangle OPM$ হতে পাই,

$OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ বের করি:

$\sin 30^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\text{cosec}30^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2$, $\sec 30^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cot 30^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$

একইভাবে,

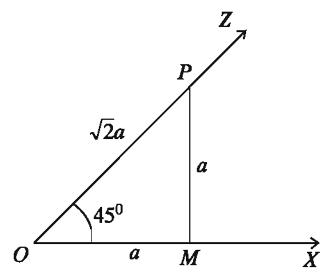
$\sin 60^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$,

$\tan 60^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$

$\text{cosec}60^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sec 60^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2$,

$\cot 60^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

45° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:



মনে করি, $\angle XOZ = 45^\circ$ এবং P, OZ এর উপরস্থ একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি।
$\triangle OPM$ সমকোণী ত্রিভুজে $\angle POM = 45^0$
সুতরাং, $\angle OPM = 45^0$
অতএব, $PM = OM = a$ (মনে করি)
এখন, $OP^2 = OM^2 + PM^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$
বা, $OP = \sqrt{2}a$
ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই,

$\sin 45^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\tan 45^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a} = 1$

$\text{cosec}45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$, $\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$,

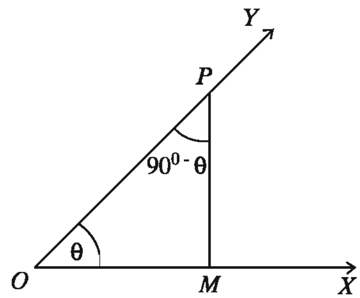
$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$

২০১৮

পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আমরা জানি যে, দুইটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাপের সমষ্টি $90°$ হলে, এদের একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলা হয়। যেমন, $30°$ ও $60°$ এবং $15°$ ও $75°$ পরস্পর পূরক কোণ।

সাধারণভাবে, θ কোণ ও $(90° - \theta)$ কোণ পরস্পরের পূরক কোণ।



মনে করি, $\angle XOY = \theta$ এবং P এই কোণের OY বাহুর উপর একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি।
যেহেতু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ,
অতএব, POM সমকোণী ত্রিভুজে $\angle PMO = 90°$
এবং $\angle OPM + \angle POM =$ এক সমকোণ = $90°$
$\angle OPM = 90° - \angle POM = 90° - \theta$
[যেহেতু $\angle POM = \angle XOY = \theta$]

$$\therefore \sin(90° - \theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\angle POM = \cos\theta$$

$$\cos(90° - \theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\angle POM = \sin\theta$$

$$\tan(90^0 - \theta) = \frac{OM}{PM} = \cot\angle POM = \cot\theta$$

$$\cot(90^0 - \theta) = \frac{PM}{OM} = \tan\angle POM = \tan\theta$$

$$\sec(90^0 - \theta) = \frac{OP}{PM} = \mathrm{cosec}\angle POM = \mathrm{cosec}\theta$$

$$\mathrm{cosec}(90^0 - \theta) = \frac{OP}{OM} = \sec\angle POM = \sec\theta$$

উপরের সূত্রগুলো নিম্নলিখিতভাবে কথায় প্রকাশ করা যায়:

পূরক কোণের sine = কোণের cosine

পূরক কোণের cosine = কোণের sine

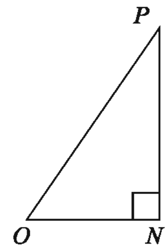
পূরক কোণের tangent = কোণের cotangent ইত্যাদি।

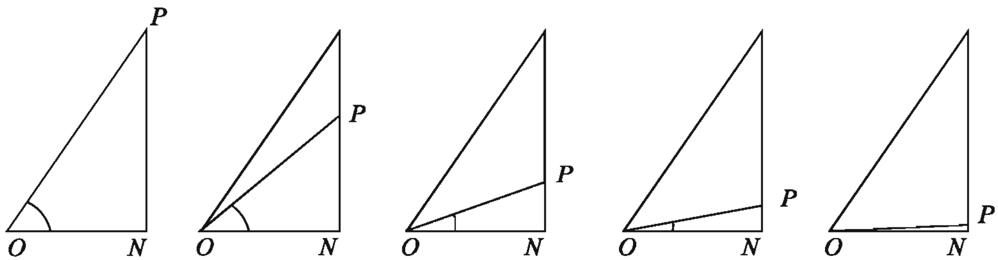
কাজ: $\sec(90° - \theta) = \frac{5}{3}$ হলে, $\mathrm{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

২০১৫

0^0 ও 90^0 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আমরা সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ θ এর জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করতে শিখেছি। এবার দেখি, কোণটি ক্রমশঃ ছোট করা হলে ত্রিকোণমিতির অনুপাতগুলো কীরূপ হয়। θ কোণটি যতই ছোট হতে থাকে, বিপরীত বাহু PN এর দৈর্ঘ্য ততই ছোট হয়। P বিন্দুটি N বিন্দুর নিকটতর হয় এবং অবশেষে θ কোণটি যখন $0°$ এর খুব কাছে অবস্থিত হয়, OP প্রায় ON এর সাথে মিলে যায়।





যখন θ কোণটি $0°$ এর খুব নিকটে আসে PN রেখাংশের দৈর্ঘ্য শূন্যের কোঠায় নেমে আসে এবং এক্ষেত্রে $\sin\theta = \dfrac{PN}{OP}$ এর মান প্রায় শূন্য। একই সময়, θ কোণটি $0°$ এর খুব কাছে এলে OP এর দৈর্ঘ্য প্রায় ON এর দৈর্ঘ্যের সমান হয় এবং $\cos\theta = \dfrac{ON}{OP}$ এর মান প্রায় 1

ত্রিকোণমিতিতে আলোচনার সুবিধার্থে $0°$ কোণের অবতারণা করা হয় এবং প্রমিত অবস্থানে $0°$ কোণের প্রান্তীয় বাহু ও আদি বাহু একই রশ্মি ধরা হয়। সুতরাং পূর্বের আলোচনার সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে বলা হয় যে, $\cos 0° = 1$, $\sin 0° = 0$

θ সূক্ষ্মকোণ হলে আমরা দেখেছি

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

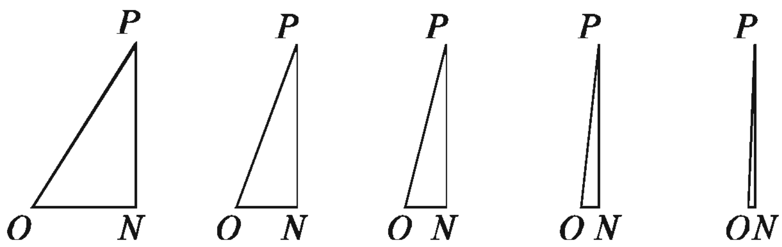
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$0°$ কোণের জন্য সম্ভাব্য ক্ষেত্রে এ সম্পর্কগুলো যাতে বজায় থাকে সে দিকে লক্ষ রেখে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = \frac{1}{1} = 1$$

0 দ্বারা ভাগ করা যায় না বিধায় $\text{cosec}\,0°$ ও $\cot 0°$ সংজ্ঞায়িত করা যায় না।



আবার, যখন θ কোণটি $90°$ এর খুব কাছে, অতিভুজ OP প্রায় PN এর সমান। সুতরাং, $\sin\theta$ এর মান প্রায় 1। অন্যদিকে, θ কোণটি প্রায় 90^0 এর সমান হলে ON শূন্যের কাছাকাছি; $\cos\theta$ এর মান প্রায় 0।

সুতরাং, পূর্বে বর্ণিত সূত্রের সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে বলা হয় যে, $\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$

$$\cot 90° = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{cosec} 90° = \frac{1}{\sin 90°} = \frac{1}{1} = 1$$

পূর্বের ন্যায় 0 দ্বারা ভাগ করা যায় না বিধায় $\tan 90°$ ও $\sec 90°$ সংজ্ঞায়িত করা যায় না।

দ্রষ্টব্য: ব্যবহারের সুবিধার্থে $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ ও $90°$ কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নিচের ছকে দেখানো হলো:

অনুপাত/কোণ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cotangent	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosecant	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

লক্ষ করি: নির্ধারিত কয়েকটি কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক মানসমূহ মনে রাখার সহজ উপায়।

(*i*) $0, 1, 2, 3$ এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\sin 0°$, $\sin 30°$, $\sin 45°$, $\sin 60°$ এবং $\sin 90°$ এর মান পাওয়া যায়।

(*ii*) $4, 3, 2, 1$ এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cos 0°$, $\cos 30°$, $\cos 45°$, $\cos 60°$ এবং $\cos 90°$ এর মান পাওয়া যায়।

(*iii*) 0, 1, 3 এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\tan 0^\circ$, $\tan 30^\circ$, $\tan 45^\circ$ এবং $\tan 60^\circ$ এর মান পাওয়া যায়। (উল্লেখ্য যে, $\tan 90^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

(*iv*) 9, 3, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cot 30^\circ$, $\cot 45^\circ$, $\cot 60^\circ$ এবং $\cot 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়। (উল্লেখ্য যে, $\cot 0^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

উদাহরণ ১৩. মান নির্ণয় কর:

ক) $\dfrac{1-\sin^2 45^\circ}{1+\sin^2 45^\circ}+\tan^2 45^\circ$

খ) $\cot 90^\circ\cdot\tan 0^\circ\cdot\sec 30^\circ\cdot\operatorname{cosec} 60^\circ$

গ) $\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 30^\circ$

ঘ) $\dfrac{1-\tan^2 60^\circ}{1+\tan^2 60^\circ}+\sin^2 60^\circ$

সমাধান:

ক) প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{1-\sin^2 45^\circ}{1+\sin^2 45^\circ}+\tan^2 45^\circ$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+(1)^2\ \left[\because \sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ও } \tan 45^\circ=1\right]$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+1=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}+1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

খ) প্রদত্ত রাশি $=\cot 90^\circ\cdot\tan 0^\circ\cdot\sec 30^\circ\cdot\operatorname{cosec} 60^\circ$

$$=0\cdot 0\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=0$$

$$\left[\because \cot 90^\circ=0, \tan 0^\circ=0, \sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}, \operatorname{cosec} 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}\ \right]$$

গ) প্রদত্ত রাশি $=\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\left[\because \sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\right]$$

২০১৮

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ঘ) প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{1 - \tan^2 60°}{1 + \tan^2 60°} + \sin^2 60°$

$$= \frac{1 - (\sqrt{3})^2}{1 + (\sqrt{3})^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad [\because \tan 60° = \sqrt{3}, \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$= \frac{1-3}{1+3} + \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{-2+3}{4} = \frac{1}{4}$$

উদাহরণ ১৪. ক) $\sqrt{2}\cos(A - B) = 1$, $2\sin(A + B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

খ) $\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

গ) $A = 45°$ প্রমাণ কর যে, $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$।

ঘ) সমাধান কর: $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান:

ক) $\sqrt{2}\cos(A - B) = 1$

বা, $\cos(A - B) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos(A - B) = \cos 45° \; [\because \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}]$

$\therefore A - B = 45^0 \ldots (1)$

এবং $2\sin(A + B) = \sqrt{3}$

বা, $\sin(A + B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin(A + B) = \sin 60° \; [\because \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}]$

$\therefore A + B = 60^0 \ldots (2)$

(1) ও (2) নং যোগ করে পাই,

$2A = 105^0$

$\therefore A = \frac{105^0}{2} = 52\frac{1^0}{2}$

আবার, (2) হতে (1) বিয়োগ করে পাই,

$2B = 15^0$

$\therefore B = \frac{15^0}{2} = 7\frac{1^0}{2}$

নির্ণেয় $A = 52\frac{1^0}{2}$ ও $B = 7\frac{1^0}{2}$

খ) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2}{-2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot A = \cot 60°$

$\therefore A = 60°$

গ) দেওয়া আছে, $A = 45°$

প্রমাণ করতে হবে, $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

বামপক্ষ $= \cos 2A$

$= \cos(2 \times 45°) = \cos 90° = 0$

ডানপক্ষ $= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°} = \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2}$

$= \frac{0}{2} = 0$

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

ঘ) প্রদত্ত সমীকরণ, $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

বা, $2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$

বা, $2(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) - 3(1-\sin\theta) = 0$

বা, $(1-\sin\theta)\{2(1+\sin\theta)-3\}=0$

বা, $(1-\sin\theta)\{2\sin\theta-1\}=0$

$\therefore 1-\sin\theta=0$

বা, $\sin\theta=1$

বা, $\sin\theta=\sin 90^0$

বা, $\theta=90°$

অথবা, $2\sin\theta-1=0$

বা, $2\sin\theta=1$

বা, $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

বা, $\sin\theta=\sin 30°$

বা, $\theta=30°$

যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ, সেহেতু, $\theta=30°$।

অনুশীলনী ৯.২

১. $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ হলে $\cot\theta$ এর মানও কোনটি?

ক) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ খ) 1

গ) $\sqrt{3}$ ঘ) 2

২. $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{1}{3}$ হলে $\cos^4\theta-\sin^4\theta$ এর মান কত?

ক) 3 খ) 2 গ) 1 ঘ) $\dfrac{1}{3}$

৩. $\cot(\theta-30°)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sin\theta=$ কত?

ক) $\dfrac{1}{2}$ খ) 0 গ) 1 ঘ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

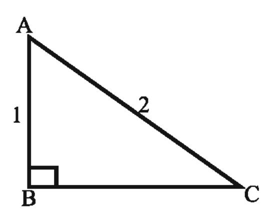
৪. $\tan(3A)=\sqrt{3}$ হলে, $A=$ কত?

ক) $45°$ খ) $30°$ গ) $20°$ ঘ) $15°$

৫. $0°\leq\theta\leq 90°$ এর জন্য, $\sin\theta=$ এর সর্বোচ্চ মান কত?

ক) -1 খ) 0 গ) $\dfrac{1}{2}$ ঘ) 1

৬. ABC সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $AC=2$, $AB=1$



(i) $\angle ACB=30°$

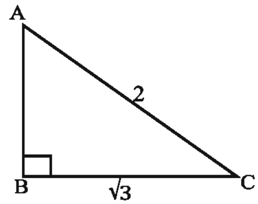
(ii) $\tan A=\sqrt{3}$

(iii) $\sin(A+C)=0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii গ) i ও ii ঘ) ii ও iii

৭. ABC সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $AC = 2$, $AB = 1$



(i) $\cos A = \sin C$

(ii) $\cos A + \sec A = \frac{5}{2}$

(iii) $\tan C = \frac{2}{\sqrt{3}}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

মান নির্ণয় কর (৮- ১১)

৮. $\frac{1-\cot^2 60^\circ}{1+\cot^2 60^\circ}$

৯. $\tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$

১০. $\frac{1-\cos^2 60^\circ}{1+\cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

১১. $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

দেখাও যে, (১২- ১৭)

১২. $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$

১৩. $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

১৪. $\cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$

১৫. $\sin 3A = \cos 3A$ যদি $A = 15^\circ$ হয়।

১৬. $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ যদি $A = 45^\circ$ হয়।

১৭. $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

১৮. $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45^\circ$, $B = 15^\circ$।

১৯. $\cos(A-B) = 1$, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A এবং B এর মান নির্ণয় কর।

২০. সমাধান কর: $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

২১. A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot(A+B) = 1$, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

২০১৮

২২. দেখাও যে, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

২৩. সমাধান কর: $\sin\theta + \cos\theta = 1$, যখন $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$

২৪. সমাধান কর: $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

২৫. সমাধান কর: $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$, θ সূক্ষ্মকোণ।

২৬. সমাধান কর: $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

২৭. মান নির্ণয় কর: $3\cot^2 60^0 + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30^0 + 5\sin^2 45^0 - 4\cos^2 60^0$

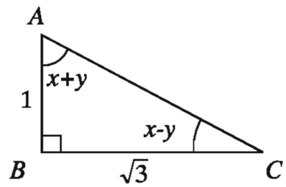
২৮. $\triangle ABC$ এর $\angle B = 90^0$, $AB = 5$ সে.মি., $BC = 12$ সে.মি.।

ক) AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ) $\angle C = \theta$ হলে $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) দেখাও যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \cdot \operatorname{cosec}^2\theta$

২৯. প্রদত্ত চিত্রের আলোকে



ক) AC এর পরিমাণ কত?

খ) $\tan A + \tan C$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) x ও y এর মান নির্ণয় কর।

৩০. $\sin\theta = p$, $\cos\theta = q$, $\tan\theta = r$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

ক) $r = \sqrt{(3)^{-1}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $p + q = \sqrt{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\theta = 45^0$

গ) $7p^2 + 3q^2 = 4$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

৩১. প্রমাণ কর যে, যেকোনো ত্রিভুজ ABC এর জন্য $\frac{AB + BC}{AC} = \cot\left(\frac{B}{2}\right)$

৩২. প্রমাণ কর যে, যেকোনো ত্রিভুজ ABC এর জন্য $AC \neq BC$ হলে

$$\frac{BC\cos C - AC\cos B}{BC\cos B - AC\cos A} + \cos C = 0$$

৩৩. প্রমাণ কর যে, যেকোনো ত্রিভুজ ABC এর জন্য

$\cot A + \cot B = 2\cot C$ হলে $AC^2 + BC^2 = 2AB^2$ হবে।